ESTIMAÇÃO DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NEBULOSA PARA SISTEMAS DINÂMICOS INCERTOS

Carlos Cesar Teixeira Ferreira*, Ginalber Luiz de Oliveira Serra*

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA)
Avenida Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, Cep: 65025-001
São Luís, Maranhão, Brazil

Emails: `ccteixeira@ifma.edu.br, ginalber@ifma.edu.br`

Abstract— This paper focuses on the Fuzzy Frequency Response Estimation for Uncertain Dynamic Systems. In terms of transfer function, the uncertain dynamic system is partitioned into several linear sub-models and it is organized into Takagi-Sugeno (TS) fuzzy structure. The proposal of this paper is to demonstrate, from a *Theorem*, that fuzzy frequency response is a boundary in the magnitude and phase of the Bode diagram. Low and high frequencies analysis of fuzzy dynamic model is obtained by varying the frequency ω from zero to infinity.

Keywords— Takagi-Sugeno fuzzy model, Uncertain dynamic systems, Fuzzy frequency response.

Resumo— Este artigo enfoca a Estimação da Resposta em Frequência Nebulosa para Sistemas Dinâmicos Incertos. Em termos de função de transferência, o sistema dinâmico incerto é dividido em vários sub-modelos lineares e organizado em uma estrutura nebulosa Takagi-Sugeno (TS). A proposta deste artigo é demonstrar, através de um *Teorema*, que a resposta em freqüência nebulosa é um contorno nos gráficos de módulo e fase do diagrama de Bode. A análise em baixa e alta freqüências do modelo dinâmico nebuloso é obtida através da variação da freqüência ω de zero a infinito.

Palavras-Chave - Modelo nebuloso Takagi-Sugeno, Sistemas dinâmicos incertos, resposta em frequência nebulosa.

1 Introdução

O termo *resposta em frequência* significa a resposta, em regime permanente, de um sistema dinâmico a uma entrada senoidal. Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos no período entre 1930 e 1940 por Harry Nyquist (1889 – 1976) (Nyquist, 1932), Hendrik Bode (1905 – 1982) (Bode, 1940), Nathaniel B. Nichols (1914 – 1997) (Nichols et al., 1947) e muitos outros. Desde então, estes métodos constituem uma ferramenta poderosa na teoria de controle convencional e indispensáveis na teoria de controle robusto (Serra et al., 2009). Em (Schust, 1973), a Marinha dos Estados Unidos obteve a resposta em frequência de aeronaves aplicando entradas senoidais nos pilotos automáticos e medindo a posição resultante da aeronave, enquanto a aeronave estava em vôo. Em (Monden et al., 2009) é introduzido um novo algoritmo de simulação para análise de resposta em frequência em malha fechada pelo Método da Transformada de Fourier (MTF).

Em muitas aplicações é importante projetar controladores robustos, isto é, controladores estáveis apesar de erros de modelagem devido a dinâmicas não-modeladas em altas frequências ou a variações paramétricas na planta. Na maioria das vezes estas incertezas, oriundas de variações de temperatura, desgaste de componentes devido a idade, etc. não seguem nenhuma distribuição de probabilidade conhecida e são frequentemente quantificadas em termos de faixas. Os métodos clássicos de resposta em frequência não exploram estas faixas para sistemas dinâmicos incertos. Para superar esta limitação, este artigo propõe a estimação da resposta em frequência nebulosa e sua aplicação na análise de sistemas dinâmicos incertos.

2 Formulação do Problema

O objetivo dessa seção é apresentar conceitos essenciais para a formulação e desenvolvimento da metodologia proposta neste artigo.

2.1 *Sistema Dinâmico Incerto*

Em termos de função de transferência, a forma geral de um sistema dinâmico incerto, como mostrado no diagrama de blocos da Figura 1, é dada pela Equação (1).

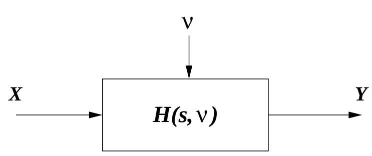


Figura 1: Sistema dinâmico incerto.

$$H(s,\nu) = \frac{Y(s,\nu)}{X(s)} = \\ = \frac{b_\alpha(\nu)s^\alpha + b_{\alpha-1}(\nu)s^{\alpha-1} + \ldots + b_1(\nu)s + b_0(\nu)}{s^\beta + a_{\beta-1}(\nu)s^{\beta-1} + \ldots + a_1(\nu)s + a_0(\nu)}, \tag{1}$$

onde: $H(s,\nu)$ é a função de transferência do sistema dinâmico incerto; $X(s)$ e $Y(s,\nu)$ representam a entrada e a saída do sistema dinâmico incerto, respectivamente; $a_*(\nu)$ e $b_*(\nu)$ são os parâmetros variantes; $\nu(t)$ é a variável de escalonamento variante no tempo; s é o operador de Laplace; α e β são as ordens do numerador e do denominador da função de transferência, respectivamente (com $\beta \geq \alpha$). A variável de escalonamento ν pertence a um conjunto compacto $\nu \in V$, com sua variação limitada por by $|\dot{\nu}| \leq d^{\max}$, onde d é o limite superior, com $d^{\max} \geq 0$.

2.2 Modelo Dinâmico Nebuloso Takagi-Sugeno

O sistema de inferência TS, originalmente proposto em (Takagi and Sugeno, 1985), apresenta no consequente uma expressão dinâmica funcional das variáveis linguísticas do antecedente. A $i\Big|^{(i=1,2,\ldots,l)}$-ésima regra, onde l representa o número de regras, é dada por

$$\begin{array}{l} Regra^{(i)}: \\ SE\ \tilde{x}_1 \text{ é } F^i_{\{1,2,\ldots,p_{\tilde{x}_1}\}|\tilde{x}_1}\ E \ldots E\ \tilde{x}_n \text{ é } F^i_{\{1,2,\ldots,p_{\tilde{x}_n}\}|\tilde{x}_n} \\ \qquad\qquad \text{ENTÃO } \ y_i = f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \end{array} \tag{2}$$

onde o número total de regras é $l = p_{\tilde{x}_1} \times \ldots \times p_{\tilde{x}_n}$. O vetor $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n]^T \in \Re^n$ contém as variáveis linguísticas do antecedente, onde T representa o operador para matriz transposta. Cada variável linguística tem seu próprio universo de discurso $\mathcal{U}_{\tilde{x}_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\tilde{x}_n}$, particionado por conjuntos nebulosos representando seus termos linguísticos, respectivamente. Na i-ésima regra, a variável $\tilde{x}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ pertence ao conjunto nebuloso $F^i_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}$ com um grau de pertinência $\mu^i_{F_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}}$ definido por uma função de pertinência $\mu^i_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}} : \Re \to [0,1]$, com $\mu^i_{F_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}} \in \{\mu^i_{F_{1|\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}}, \mu^i_{F_{2|\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}}, \ldots, \mu^i_{F_{p|\{\tilde{x}_1 \tilde{x}_n\}}}\}$, onde $p_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\}}$ é o número de partições do universo de discurso associado com a variável linguística $\tilde{x}_1, \ldots, ,\tilde{x}_n$. A saída do modelo dinâmico TS é uma combinação convexa das expressões dinâmicas funcionais do consequente $f_i(\tilde{\mathbf{x}})$ que, sem perda de generalidade para o caso bidimensional, como ilustrado na Figura 2, é dada por

$$y(\tilde{\mathbf{x}},\gamma) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) f_i(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{3}$$

onde $y(\tilde{\mathbf{x}},\gamma)$ é a saida do modelo nebuloso TS; γ é a variável de escalonamento do modelo dinâmico nebuloso TS. A variável de escalonamento, também conhecida como grau de ativação normalizado, é dada por:

$$\gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{h_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\displaystyle\sum_{r=1}^{l} h_r(\tilde{\mathbf{x}})}. \tag{4}$$

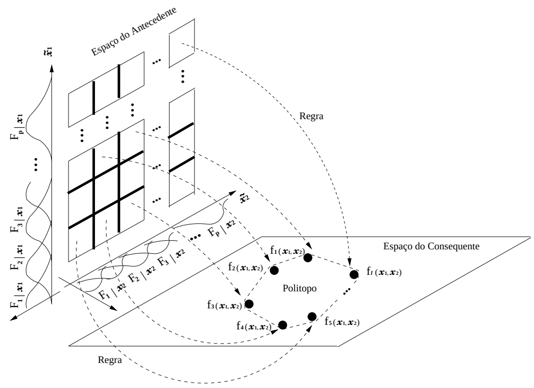


Figura 2: Modelo dinâmico nebuloso: um modelo TS pode ser considerado como um mapeamento do espaço do antecedente para o consequente.

onde $h_i(\tilde{\mathbf{x}})$ é o grau de ativação de cada regra. Esta normalização implica em:

$$\sum_{k=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\mathbf{x}}) = 1. \tag{5}$$

Pode ser observado que o modelo dinâmico nebuloso TS, que representa qualquer modelo dinâmico incerto, pode ser considerado como uma classe de sistemas onde $\gamma_i(\tilde{\mathbf{x}})$ denota uma decomposição de variáveis linguísticas $[\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n]^T \in \Re^n$ para uma região geométrica politópica no espaço do consequente a partir das expressões funcionais $f_i(\tilde{\mathbf{x}})$.

3 Resposta em Frequência Nebulosa (RFN): Definição

A resposta de um modelo dinâmico nebuloso TS a uma entrada senoidal de frequência ω_1, em amplitude e fase, define uma função de transferência avaliada em $s = j\omega_1$, como ilustrado na Figura 3.

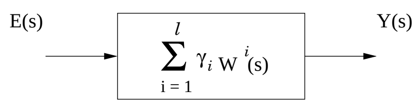


Figura 3: Função de transferência nebulosa TS.

Para este modelo dinâmico nebuloso TS,

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^{l} \gamma_i W^i(s)\right] E(s). \tag{6}$$

Considerando-se $\tilde{W}(j\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \gamma_i W^i(j\omega)$ um número complexo para uma dada frequência ω, como:

$$\tilde{W}(j\omega) = \left|\sum_{i=1}^{l} \gamma_i W^i(j\omega)\right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l} \gamma_i W^i(j\omega)\right]. \tag{7}$$

então, para o caso em que a entrada $e(t)$ é senoidal, isto é

$$e(t) = A \sin \omega_1 t, \tag{8}$$

a saída $y_{ss}(t)$, em regime permanente, é dada por

$$y_{ss}(t) = A \left| \sum_{i=1}^{l} \gamma_i W^i(j\omega) \right| \sin\left[\omega_1 t + \phi(\omega_1)\right] \tag{9}$$

Como resultado da definição de resposta em frequência nebulosa, é proposto o seguinte *Teorema*:

Theorem 1 *A resposta em frequência nebulosa é uma região no domínio da frequência, definida pelos sub-modelos do consequente e a partir das regiões de operação no espaço do antecedente.*

Proof: Considerando-se que $\tilde{\nu}$ é uma variável linguística do parâmetro incerto ν, ela pode ser representada por termos linguísticos. Uma vez conhecido seus universos de discurso, como mostrado na Figura 4, os graus de ativação, $h_i(\tilde{\nu})|^{i=1,2,\ldots,l}$, são também incertos, desde que dependem do sistema dinâmico incerto. Assim:

$$h_i(\tilde{\nu}) = \mu^i_{F_{\tilde{\nu}_1^*}} \star \mu^i_{F_{\tilde{\nu}_2^*}} \star \ldots \star \mu^i_{F_{\tilde{\nu}_n^*}} \tag{10}$$

onde $\tilde{\nu}^*_{\{1,2,\ldots,n\}} \in \mathcal{U}_{\tilde{\nu}_{\{1,2,\ldots,n\}}}$, respectivamente, e $\star$ é um operador lógico nebuloso.

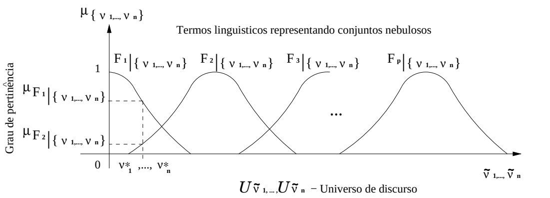


Figura 4: Descrição funcional das variáveis linguísticas: termos linguísticos, universo de discurso e graus de pertinência.

Os graus de ativação normalizados $\gamma_i(\tilde{\nu})|^{i=1,2,\ldots,l}$, são também incertos:

$$\gamma_i(\tilde{\nu}) = \frac{h_i(\tilde{\nu})}{\displaystyle\sum_{r=1}^{l} h_r(\tilde{\nu})}. \tag{11}$$

Esta normalização implica

$$\sum_{k=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\nu}) = 1. \tag{12}$$

Seja $F(s)$ um espaço vetorial de funções de transferência com grau l e $f^1(s), f^2(s), \ldots, f^l(s)$ funções de transferência que pertencem à base deste espaço vetorial. Uma função de transferência $f(s) \in F(s)$ deve ser uma combinação dos vetores $f^1(s), f^2(s), \ldots, f^l(s)$. Assim:

$$f(s) \quad = \quad \xi_1 f^1(s) + \xi_2 f^2(s) + \ldots + \xi_l f^l(s) \tag{13}$$

onde $\xi_{1,2,\ldots,l}$ são os coeficientes da combinação linear. Se os coeficientes são normalizados, a soma dos graus de ativação é igual a 1 $\left(\sum_{i=1}^{l} \xi_i = 1\right)$, o espaço vetorial apresenta uma decomposição das funções de transferência $\left[f^1(s),\ f^2(s), \ldots, f^l(s)\right]$ em uma região geométrica politópica do espaço vetorial $F(s)$. Os pontos da região geométrica politópica são definidos pelas funções de transferência $\left[f^1(s), f^2(s), \ldots, f^l(s)\right]$. O modelo dinâmico nebuloso TS atende a esta propriedade politópica. Para definir os pontos desta região politópica nebulosa, cada regra do modelo dinâmico nebuloso deve ser ativada individualmente. Esta condição é conhecida como condição de contorno. Daí, os seguintes resultados são obtidos para a Resposta em Frequência Nebulosa (RFN) da função de transferência nebulosa:

- *Se somente a regra* 1 *é ativada, tem-se* $(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \ldots, \gamma_l = 0)$. *Então,*

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right], \tag{14}$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| 1W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \ldots + 0W^l(j\omega) \right| \angle \arctan\left[1W^1(j\omega) + 0W^2(j\omega) + \ldots + 0W^l(j\omega) \right], \tag{15}$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| W^1(j\omega) \right| \angle \arctan\left[W^1(j\omega) \right]. \tag{16}$$

- *Se somente a regra* 2 *é ativada, tem-se* $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0, \ldots, \gamma_l = 0)$. *Então,*

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l} \gamma_i(\tilde{\nu}) W^i(j\omega) \right], \tag{17}$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| 0W^1(j\omega) + 1W^2(j\omega) + \ldots + 0W^l(j\omega) \right| \angle \arctan\left[0W^1(j\omega) + 1W^2(j\omega) + \ldots + 0W^l(j\omega) \right], \tag{18}$$

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) = \left| W^2(j\omega) \right| \angle \arctan\left[W^2(j\omega) \right]. \tag{19}$$

- *Se somente a regra* l *é ativada, tem-se* $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \ldots, \gamma_l = 1)$. *Então,*

$$\tilde{W}(j\omega, \tilde{\nu}) =$$

$$\left|\sum_{i=1}^{l}\gamma_i(\tilde{\nu})W^i(j\omega)\right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l}\gamma_i(\tilde{\nu})W^i(j\omega)\right], \quad (20)$$

$$\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = \left|0W^1(j\omega)+0W^2(j\omega)+\ldots+1W^l(j\omega)\right|$$
$$\angle \arctan\left[0W^1(j\omega)+0W^2(j\omega)+\ldots+1W^l(j\omega)\right], \quad (21)$$

$$\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = \left|W^l(j\omega)\right| \angle \arctan\left[W^l(j\omega)\right]. \quad (22)$$

Onde $W^1(j\omega), W^2(j\omega), \ldots, W^l(j\omega)$ são os submodelos lineares do sistema dinâmico incerto. Note que $\left|W^1(j\omega)\right| \angle \arctan\left[W^1(j\omega)\right]$ and $\left|W^l(j\omega)\right| \angle \arctan\left[W^l(j\omega)\right]$ definem uma região de contorno. Sob tais circunstâncias, a resposta em frequência nebulosa para sistemas dinâmicos incertos converge para uma faixa no domínio da frequência, definida por uma superfície baseada no graus de pertinências. A Figura 5 mostra a resposta em frequência nebulosa para o caso bidimensional, sem perda de generalidade.

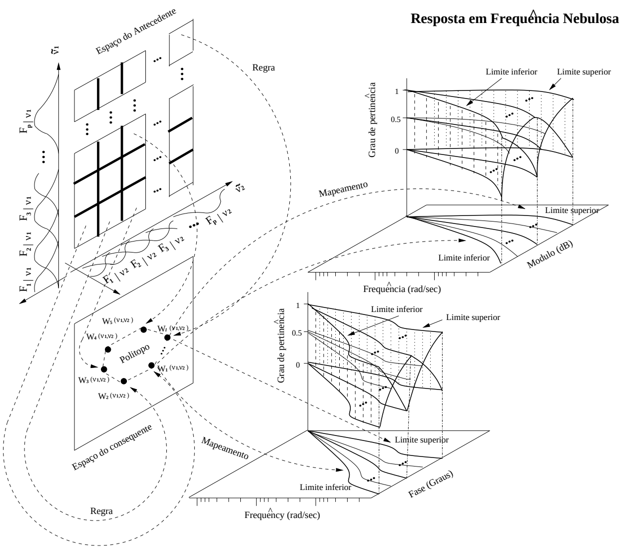


Figura 5: Resposta em frequência nebulosa: mapeamento a partir do espaço do consequente para a região no domínio da frequência.

□

4 Resposta em Frequência Nebulosa (RFN): Análise

4.1 Análise em Baixas Frequências

A análise em baixas frequências do modelo dinâmico nebuloso TS, $\tilde{W}(s)$, pode ser obtida por

$$\lim_{\omega\to 0}\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega) \quad (23)$$

Então, o comportamento do módulo e fase nas baixas frequências, é dado por

$$\lim_{\omega\to 0}\left|\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega)\right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega)\right] \quad (24)$$

4.2 Análise em Altas Frequências

Equivalentemente, a análise em altas frequências do modelo dinâmico nebuloso, $\tilde{W}(s)$, pode ser obtido por

$$\lim_{\omega\to \infty}\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega) \quad (25)$$

Então, o comportamento do módulo e fase nas altas frequências, é dado por

$$\lim_{\omega\to \infty}\left|\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega)\right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{l}\gamma_i W^i(j\omega)\right] \quad (26)$$

5 Resultados Computacionais

Considere o seguinte sistema dinâmico incerto, dado por

$$H(s,\nu) = \frac{2-\nu}{[(\nu+1)s+1]\left[\left(\frac{\nu}{2}+0.1\right)s+1\right]} \quad (27)$$

onde a variável de escalonamento é $\nu = [0,1]$; o ganho do sistema dinâmico incerto é $K_p = 2-\nu$; a maior constante de tempo é $\tau = \nu+1$; e a menor constate de tempo é $\tau' = \frac{\nu}{2}+0.1$. A partir do sistema dinâmico incerto da Equação (27) e assumindo que a variável de escalonamento varia no tempo numa faixa de $[0,1]$, pode-se obter a base de regras do modelo dinâmico nebuloso:

$$\begin{aligned} R^{(1)}:&\ \text{SE } \nu \text{ é } 0 \text{ ENTÃO } W^1(s,0) = \frac{2}{0.1s^2+1.1s+1} \\ R^{(2)}:&\ \text{SE } \nu \text{ é } \frac{1}{2} \text{ ENTÃO } W^2(s,\frac{1}{2}) = \frac{1.5}{0.5s^2+1.8s+1} \\ R^{(3)}:&\ \text{SE } \nu \text{ é } 1 \text{ ENTÃO } W^3(s,1) = \frac{1}{1.2s^2+2.6s+1} \end{aligned} \quad (28)$$

O modelo dinâmico nebuloso TS do sistema dinâmico incerto pode ser representado por

$$\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = \left|\sum_{i=1}^{3}\gamma_i(\tilde{\nu})W^i(j\omega)\right| \angle \arctan\left[\sum_{i=1}^{3}\gamma_i(\tilde{\nu})W^i(j\omega)\right] \quad (29)$$

e

$$\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) =$$

$$\left|2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right| \angle \arctan$$
$$\left[2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right] \quad (30)$$

onde: $Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]} = 0.1(j\omega)^6 + 1.1(j\omega)^5 + 5.2(j\omega)^4 + 11.2(j\omega)^3 + 11.5(j\omega)^2 + 5.6(j\omega) + 1$.

5.1 Análise em Baixas Frequências

A resposta em regime permanente a uma entrada senoidal, em baixas frequências, do modelo dinâmico nebuloso TS, pode ser obtida como segue:

$$\lim_{\omega\to 0} \tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) =$$
$$\left|2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right| \angle \arctan$$
$$\left[2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right]. \quad (31)$$

Quando ω tende a zero, Eq.(31) pode ser aproximada como segue:

$$\lim_{\omega\to 0} \tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = |2\gamma_1 + 1.5\gamma_2 + \gamma_3| \angle \arctan [2\gamma_1 + 1.5\gamma_2 + \gamma_3]. \quad (32)$$

Daí,

$$\lim_{\omega\to 0} \tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = |2\gamma_1 + 1.5\gamma_2 + \gamma_3| \angle 0^o \quad (33)$$

5.2 Análise em Altas Frequências

A resposta em regime permanente a uma entrada senoidal, em altas frequências, do modelo dinâmico nebuloso TS, pode ser obtida como segue:

$$\lim_{\omega\to \infty} \tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) =$$
$$\left|2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right| \angle \arctan$$
$$\left[2\gamma_1 \frac{0.6(j\omega)^4 + 3.6(j\omega)^3 + 6.5(j\omega)^2 + 4.5(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} + \right.$$
$$1.5\gamma_2 \frac{0.1(j\omega)^4 + 1.6(j\omega)^3 + 4.2(j\omega)^2 + 3.7(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}} +$$
$$\left.\gamma_3 \frac{0.1(j\omega)^4 + 0.8(j\omega)^3 + 2.7(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}{Den_{\left[\tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu})\right]}}\right] \quad (34)$$

Nesta análise, os termos de maior ordem da função de transferência no modelo dinâmico nebuloso aumentam mais rapidamente do que os outros termos, à medida que ω cresce. Daí,

$$\lim_{\omega\to \infty} \tilde{W}(j\omega,\tilde{\nu}) = \left|2\gamma_1 \frac{0.6}{0.1(j\omega)^2} + 1.5\gamma_2 \frac{0.1}{0.1(j\omega)^2} + \gamma_3 \frac{0.1}{0.1(j\omega)^2}\right| \angle -180^o \quad (35)$$

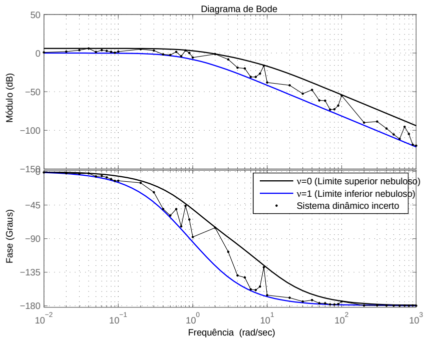
A Figura 6 mostra as características da resposta em frequência nebulosa para o sistema dinâmico incerto obtida pela metodologia proposta. Para este experimento, a resposta em frequência nebulosa do sistema dinâmico incerto foi obtida considerando a média do parâmetro incerto ν, como variável linguística e no domínio da frequência, como mostrado na Figura 7.

6 Conclusões

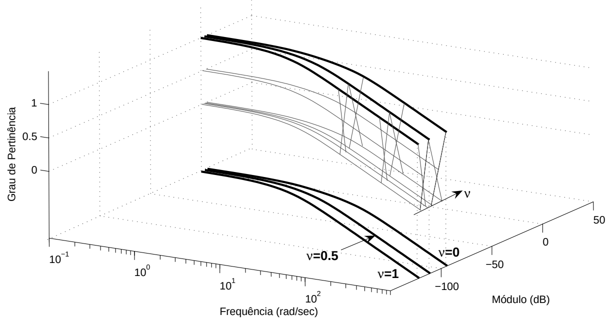
A estimação da resposta em frequência nebulosa para sistemas dinâmicos incertos é proposta neste artigo. Mostra-se que a resposta em frequência nebulosa é uma região no domínio da frequência, definida por uma combinação linear dos submodelos $W^i(s)$, a partir das regiões de operação do sistema dinâmico incerto, de acordo com o *Teorema 1* proposto. Esta formulação é muito eficiente e pode ser utilizada para análise de estabilidade e projeto de controle robusto de sistemas dinâmicos incertos.

Agradecimentos

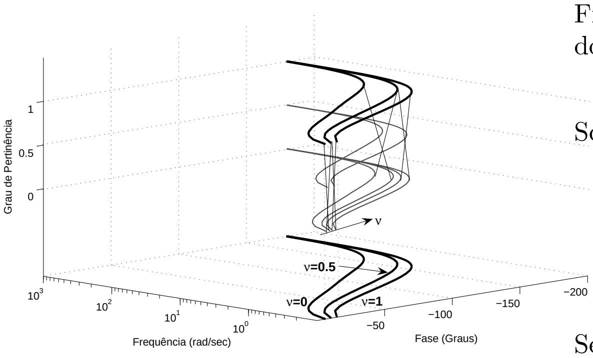
Os autores agradecem à FAPEMA e à CAPES pelo suporte desta pesquisa.



(a) Região de contorno.

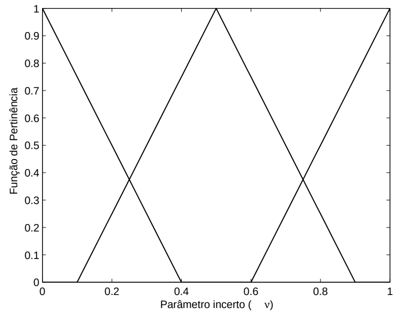


(b) Módulo

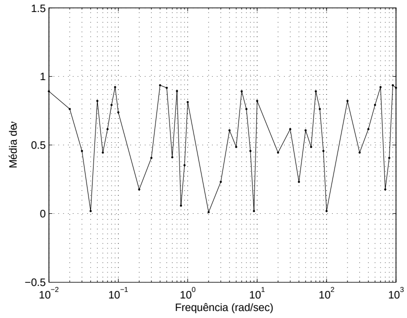


(c) Fase.

Figura 6: Resposta em frequência nebulosa do sistema dinâmico incerto.



(a) Conjuntos nebulosos do parâmetro incerto (ν).



(b) Variação média do parâmetro incerto ν no domínio da frequência.

Figura 7: Características nebulosa e estocástica do parâmetro incerto (ν).

Referências

Bode, H. W. (1940). Feedback amplifier design, *Bell Systems Technical Journal* **19**: 42.

Monden, T., Sato, T., Nabeshima, T. and Nishijima, K. (2009). Closed loop frequency response analysis method for circuit simulator, *International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, pp. 1200–1204.

Nichols, N. B., James, H. M. and Phillips, R. S. (1947). *Theory of servomechanisms*, Vol. 25 of MIT Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill.

Nyquist, H. (1932). Regeneration theory, *Bell Systems Technical Journal* .

Schust, J. A. P. (1973). Determination of aircraft response caracteristics in approach/landing configuration for microwave landing system program, *Technical report*, Report FT-61R-73, Naval Air Test Center, Patuxent River, MD.

Serra, G. L. O., Ferreira, C. C. T. and Silva, J. A. (2009). Development method for a robust pid fuzzy controller of lpv systems, *IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems*, pp. 826–830.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst. Man. Cyber*, Vol. 15, pp. 116–132.